Chapter 1

Les indices

1.1 Les indices élémentaires

1.1.1 Un exemple

Une boîte de lait en poudre vaut :

• $3,50F$ le 1er juin 1977
• $4,20F$ le 1er juin 1978

L'évolution chiffré du prix de ce bien du 01/06/1977 au 01/06/1978 peut être appréhendée de différents manières :

• le prix a augmenté de $4,20 - 3,50 = 0,70F$

• le prix a augmenté de $0,70/3,50 = 0,2$ soit de 20%

• détermination du rapport des prix de 1978 sur 1977

$$4,20/3,50 = 1,2$$

• multiplions le rapport précédent par $100 \rightarrow 120$
Ce qui indique que la quantité de lait en poudre qui coûtait $100F$ au 1er juin 1977 coûtait $120F$ au 1er juin 1978

120 est appelé indice du prix du lait en poudre au 1er juin 1978, calculé sur la base 100 au 1er juin 1977

Il indique une variation **relative** (20%) et non **absolue** ($0,70F$)

Si la boîte double de lait en poudre vaut :

• $7F$ le 1er juin 1977
• $8,40F$ le 1er juin 1978

l'indice reste le même : $100 \times 8,40/7 = 120$

Pourquoi la variation relative plutôt que la variation absolue ?
$\rightarrow$ permettre la comparaison entre différents produits

Si le prix de la douzaine d'oeufs est passé durant la même période de $6F$ à $6,90F$, doit-on dire que le prix des oeufs, qui a augmenté de $0,90F$, a augmenté

• plus que celui du lait en poudre ? (si je regarde la petite boîte)
• moins que celui du lait en poudre ? (si je regarde la grande boîte)

En revanche, en calculant l'indice, on obtient :
$100 \times 6,90/6 = 115$

1.1.2 Définition

Soit X une variable quantitative.
Soit x_t la valeur prise par la variable X à la situation t et x_0 la valeur prise par la variable X à la situation 0.
On appelle indice simple (ou élémentaire) de la variable X à la situation t par rapport à la situation 0, et on note $I(X)_{t/0}$ le rapport défini par

$$I(X)_{t/0} = 100.\frac{x_t}{x_0}$$

La situation 0 est dite de *base* ou de *référence*
La situation t est dite *courante*

1.1.3 Propriétés des indices simples

La transitivité (ou transférabilité)

Un indice est dit transitif s'il vérifie, quelles que soient les situations r, s et t :

$$I(X)_{r/s}.I(X)_{s/t} = I(X)_{r/t}.100$$

La réversibilité

Un indice est dit réversible s'il vérifie, quelles que soient les situations s et t :

$$I(X)_{t/s} = \frac{1}{I(X)_{s/t}}.100^2$$

Exemple :

année	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
prix	20	21	23	25	26	28	29
I_{72}	100	105	115	125	130	140	145
I_{75}	80	84	92	100	104	112	116

Supposons que $r = 1978$, $s = 1975$ et $t = 1972$, on vérifie alors :

$$I(p)_{78/75}.I(p)_{75/72} = I(p)_{78/72}.100 = 14500$$

et

$$I(p)_{t/s} = \frac{1}{I(p)_{s/t}}.100^2 \Leftrightarrow 80 = \frac{1}{125}.100^2$$

1.2 Les indices synthétiques

1.2.1 Moyenne des indices simples

Indice des moyennes arithmétiques simples

	t	$t+1$
jambon	$3,00$	$3,30$
pain	$0,40$	$0,30$

L'indice du prix du jambon (base t) est en $t+1$: 110
L'indice du prix du pain (base t) est en $t+1$: 75

L'indice des moyennes arithmétiques simples est :
$(110+75)/2 = 92,5$

Indice des moyennes arithmétiques pondérées

	t	$t+1$	pondération
jambon	$3,00$	$3,30$	$0,9$
pain	$0,40$	$0,30$	$0,1$

L'indice des moyennes arithmétiques pondérées est :

$$\frac{3,30 \times 0,9 + 0,3 \times 0,1}{3,00 \times 0,9 + 0,4 \times 0,1} \times 100 = \frac{3}{2,74} \times 100 \simeq 109,5$$

Moyenne arithmétique pondérées des indices simples

$$110 \times 0,9 + 75 \times 0,1 = 106,5$$

Problème : Les indices de prix que nous venons de voir n'intègrent pas les quantités consommées
$\longrightarrow$ ces quantités pourraient être utilisées pour pondérer puisqu'elles donnent des informations sur l'impact réel des variations de prix sur le budget des ménages.

1.2.2 Indice de Laspeyres

	P 1990	P 1995	P 1997	Q 1990	Q 1995	Q 1997
boeuf	$91,61$	$97,77$	$97,17$	$17,60$	$16,70$	$15,93$
pâtes	$9,78$	$9,80$	$9,60$	$6,71$	$6,90$	$7,02$
lait	$5,35$	$5,61$	$5,73$	$76,77$	$71,02$	$68,59$
huile	$13,49$	$14,16$	$14,21$	$11,38$	$11,63$	$11,68$

$$L(p)_{t/0} = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_{j,0}p_{j,t}}{\sum_{j=1}^{n} q_{j,0}p_{j,0}} \times 100$$

On peut simplifier la notation en supprimant l'indice j sans que cela nuise à la compréhension de la formule

$$L(p)_{t/0} = \frac{\sum q_0 p_t}{\sum q_0 p_0} \times 100$$

L'indice la Laspeyres fixe les quantités à la **période de référence** $\rightarrow$ avantage : il suffit de suivre l'évolution des prix pour l'établir

1.2.3 Indice de Paasche

$$P(p)_{t/0} = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_{j,t}p_{j,t}}{\sum_{j=1}^{n} q_{j,t}p_{j,0}} \times 100$$

Simplification

$$P(p)_{t/0} = \frac{\sum q_t p_t}{\sum q_t p_0} \times 100$$

L'indice la Paasche fixe les quantités à la **période courante**
$\rightarrow$ avantage : il tient compte de la manière dont les ménages modifient leur consommation, mais il faut suivre l'évolution des quantités

Application numérique :

$$L(p)_{90/90} = \frac{17,60 \times 91,61 + 6,71 \times 9,78 + 76,77 \times 5,35 + 11,38 \times 13,49}{17,60 \times 91,61 + 6,71 \times 9,78 + 76,77 \times 5,35 + 11,38 \times 13,49} \times 100$$

$$L(p)_{95/90} = \frac{17,60 \times 97,77 + 6,71 \times 9,80 + 76,77 \times 5,61 + 11,38 \times 14,16}{17,60 \times 91,61 + 6,71 \times 9,78 + 76,77 \times 5,35 + 11,38 \times 13,49} \times 100$$

$$L(p)_{97/90} = \frac{17,60 \times 97,17 + 6,71 \times 9,60 + 76,77 \times 5,73 + 11,38 \times 14,21}{17,60 \times 91,61 + 6,71 \times 9,78 + 76,77 \times 5,35 + 11,38 \times 13,49} \times 100$$

$$P(p)_{90/90} = \frac{17,60 \times 91,61 + 6,71 \times 9,78 + 76,77 \times 5,35 + 11,38 \times 13,49}{17,60 \times 91,61 + 6,71 \times 9,78 + 76,77 \times 5,35 + 11,38 \times 13,49} \times 100$$

$$P(p)_{95/90} = \frac{16,70 \times 97,77 + 6,90 \times 9,80 + 71,02 \times 5,61 + 11,63 \times 14,16}{16,70 \times 91,61 + 6,90 \times 9,78 + 71,02 \times 5,35 + 11,63 \times 13,49} \times 100$$

$$P(p)_{97/90} = \frac{15,93 \times 97,17 + 7,02 \times 9,60 + 68,59 \times 5,73 + 11,68 \times 14,21}{15,93 \times 91,61 + 7,02 \times 9,78 + 68,59 \times 5,35 + 11,68 \times 13,49} \times 100$$

Les indices de Laspeyres et de Paasche ne possèdent pas les propriétés de transitivité et de réversibilité
Autrement dit, en général,

$$L_{r/s}.L_{s/t} \neq L_{r/t} \quad et \quad P_{r/s}.P_{s/t} \neq P_{r/t}$$

et

$$L_{t/s} \neq \frac{1}{L_{s/t}}.100^2 \quad et \quad P_{t/s} \neq \frac{1}{P_{s/t}}.100^2$$

Propriété de pseudo-réversibilité Laspeyres-Paasche

De par la définition de ces indices, on a toujours :

$$L_{t/0} = \frac{1}{P_{0/t}}.100^2 \quad et \quad P_{t/0} = \frac{1}{L_{0/t}}.100^2$$

Démonstration : trivial

1.2.4 Indice de Fisher

Aucun critère théorique ne permet de déterminer si l'un des deux indices (Laspeyres ou Paasche) est plus pertinent que l'autre
$\rightarrow$ Fischer propose un indice qui est la moyenne géométrique des indices de Laspeyres et de Paasche

L'indice de Fischer est le nombre défini par

$$F_{t/0} = \sqrt{L_{t/0} \times P_{t/0}}$$

Retour à l'exemple :

$$F(p)_{90/90} = \sqrt{100 \times 100} = 100$$

$$F(p)_{95/90} = \sqrt{106,07 \times 106,06} \simeq 106,06$$
$$F(p)_{97/90} = \sqrt{105,98 \times 105,93} \simeq 105,95$$

L'indice de Fischer n'est pas transitif

L'indice de Fischer est réversible

Démonstration : trivial